J. Sci. & Devel. 2015, Vol. 13, No. 5: 797-812 Tạp chí Khoa học và Phát triển 2015, tập 13, số 5: 797-812
www.vnua.edu.vn

PHÂN TÍCH TĨNH VÀ DAO ĐỘNG RIÊNG TẤM BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIÊN THIÊN (FGM) THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO ĐƠN GIẢN

Dương Thành Huân[1*], Lê Minh Lư[1], Trần Minh Tú[2], Vũ Văn Thẩm[2]

[1]Khoa Cơ Điện, Học viện Nông nghiệp Việt Nam
[2]Khoa Xây dựng dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng

Email[*]: tpnt2002@yahoo.com

Ngày gửi bài: 22.12.2014 Ngày chấp nhận: 30.07.2015

TÓM TẮT

Vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Materials - FGM) là loại vật liệu không đồng nhất, đẳng hướng có tính chất cơ học thay đổi trơn, liên tục theo chiều dày của tấm. Bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đơn giản (Simple higher Order Shear Deformation Theory - S-HSDT) để phân tích tĩnh và dao động riêng của tấm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. Mô đun đàn hồi kéo (nén) của vật liệu được giả thiết biến thiên theo qui luật hàm mũ, hệ số Poisson là hằng số theo tọa độ chiều dày. Hệ phương trình cân bằng động của tấm được xác định theo nguyên lý Hamilton. Ảnh hưởng của chỉ số tỉ lệ thể tích, các tham số kích thước tấm đến độ võng, ứng suất và tần số dao động riêng được khảo sát. Kết quả số được so sánh với kết quả của các tác giả đã công bố nhằm kiểm chứng mô hình tính mà bài báo đã xây dựng.

Từ khóa: Dao động riêng, lý thuyết biến dạng cắt, phân tích tĩnh, tấm có cơ tính biến thiên.

Static and Vibration Analysis of Functionally Graded Plates Using The Simple Higher Order Shear Deformation Theory (S-HSDT)

ABSTRACT

This paper used the simple higher order shear deformation theory (S-HSDT) to analyse the static and free vibration of simply supported (diaphragm), elastic functionally graded (FG), rectangular, plates. Functionally graded materials (FGMs), although heterogeneous are idealized as continua with their mechanical properties changing smoothly with respect to the spatial coordinates. Poisson's ratio is assumed to be constant, but their Young's moduli and densities vary continuously in the thickness direction according to the volume fraction of constituents, which is mathematically modelled as power law function. The equations of motion are obtained using Hamilton's principle employing S-HSDT. Navier's solution is used to solve the equations of motion. The effect of variation of material properties in terms of gradation index, the effects of aspect ratios, thickness-to-side ratio on the bending, the stresses and the natural frequencies of FG plates are studied in this article. The numerical results are also compared with results available in the literature to validate theoretical model of the paper.

Keywords: Static analysis, vibration analysis, power-law functionally graded plate, shear deformation plate theory.

1. MỞ ĐẦU

Vật liệu có cơ tính biến thiên là hỗn hợp của hai vật liệu thành phần với tỉ lệ nhất định để đạt được một chức năng mong muốn tùy theo mục đích sử dụng. Các tính chất của vật liệu có cơ tính biến thiên biến đổi trơn từ bề mặt này sang bề mặt khác nên tránh được sự tập trung ứng suất thường gặp ở các kết cấu bằng vật liệu composite lớp. Kết cấu bằng vật liệu có cơ tính biến thiên

được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực: cơ khí, xây dựng dân dụng, hàng không, công nghiệp hạt nhân, ô tô,... Để tính toán và thiết kế các loại kết cấu tấm và vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên, nhiều mô hình tính toán đã được đề xuất và phát triển. Các lý thuyết này có thể chia làm ba nhóm chính: lý thuyết tấm cổ điển (CPT), lý thuyết tấm bậc nhất (FSDT) và lý thuyết tấm bậc cao (HSDT).

Lý thuyết tấm cổ điển bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang và cho kết quả phù hợp với tấm mỏng theo Javaheri và Eslami (2002), Zhang và Zhou (2008), Mohammadi et al. (2010), Bodaghi và Saidi (2011). Với tấm có độ dày trung bình lý thuyết này cho kết quả về độ võng thấp hơn, nhưng lực tới hạn về ổn định và tần số dao động riêng cao hơn. Lý thuyết tấm bậc nhất kể đến ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang nhưng cần phải sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt để thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt ngang bằng không tại mặt trên và dưới của tấm theo Della Croce and Venini (2004), Ganapathi et al. (2006), Zhao và Liew (2009), Lee et al. (2010), Hosseini-Hashemi et al. (2010), Hosseini-Hashemi et al. (2011). Việc xác định hệ số hiệu chỉnh cắt một cách chính xác là khó khăn, do vậy các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đã được đề xuất trên cơ sở các giả thiết trường chuyển vị màng biến thiên bậc hai, bậc ba, bậc cao theo chiều dày. Trong số các lý thuyết tấm bậc cao, lý thuyết tấm bậc cao với năm ẩn số chuyển vị được biết đến với tên gọi: lý thuyết Reddy theo Reddy (2000), lý thuyết biến dạng cắt dạng hàm sin theo Zenkour (2005a, 2005b, 2006), lý thuyết biến dạng cắt dạng hàm hyperbol theo Benyoucef et al. (2010), Atmane et al. (2010), lý thuyết biến dạng cắt dạng hàm e-mũ theo Karama et al. (2003), Mantari et al. (2012). Một số lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đòi hỏi khối lượng tính toán lớn với 9 ẩn chuyển vị theo Pradyumna và Bandyopadhyay (2008), Neves et al. (2012a, 2012b, 2012c), với 11 ẩn chuyển vị theo Reddy (2011) hay 13 ẩn chuyển vị theo Taha et al., (2010).

Mục đích của bài báo là xây dựng lý thuyết tấm bậc cao đơn giản (S-HSDT) cho tấm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên với bốn ẩn số chuyển vị và thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt ngang bằng không tại mặt trên và dưới của tấm. Trường chuyển vị được giả thiết là hằng số đối với độ võng và là hàm bậc ba với các chuyển vị màng. Độ võng được chia làm hai thành phần: uốn và cắt do vậy làm giảm số ẩn chuyển vị cũng như số phương trình chuyển động cần thiết và có thể sử dụng trong tính toán một cách đơn giản hơn.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Vật liệu có cơ tính biến thiên

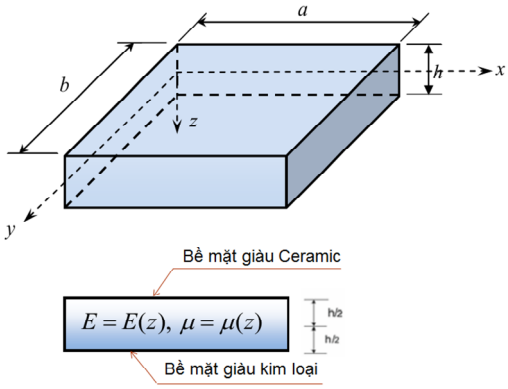
Đối với vật liệu có cơ tính biến thiên, hai thành phần tạo thành từ sự kết hợp của kim loại và ceramic, tỷ lệ thể tích của các thành phần vật liệu được giả thiết biến đổi theo qui luật xác định. Qui luật phân bố của hàm tỉ lệ thể tích là cơ sở để phân loại vật liệu FGM. Phần lớn các nhà nghiên cứu sử dụng hàm lũy thừa, hàm e - mũ hoặc hàm Sigmoid để mô tả biến thiên của hàm tỉ lệ thể tích. Hàm tỉ lệ thể tích dạng hàm lũy thừa viết dưới dạng sau:

$$g(z)=\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{p} \quad \text{với } p \text{ là chỉ số tỉ lệ thể tích} \qquad (1)$$

Trong bài báo này hệ số Poisson ν được giả thiết là hằng số, mô đun đàn hồi E và khối lượng riêng ρ của vật liệu FGM được giả thiết biến thiên theo quy luật hàm lũy thừa và có dạng sau (Reddy, 2000):

$$E(z)=E_m+(E_c-E_m).\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{p} \qquad (2)$$

$$\rho(z)=\rho_m+(\rho_c-\rho_m).\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{p} \qquad (3)$$



Hình 1. Mô hình kết cấu tấm làm từ vật liệu FGM

2.2. Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đơn giản Reddy

2.2.1. Các giả thiết

Theo Reddy trường chuyển vị bậc cao không đầy đủ được giả thiết như sau (Reddy JN., 2000):

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) + z^2 u_0^*(x,y) + z^3\theta_x^*(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) + z^2 v_0^*(x,y) + z^3\theta_y^*(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad (4)$$

Trong đó: u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm bất kỳ có tọa độ (x,y) trên mặt trung bình.

u_0^*, v_0^*, θ_x^*, θ_y^* là các số hạng bậc cao trong khai triển Taylor hàm chuyển vị theo tọa độ chiều dày.

Các thành phần biến dạng cắt ngang xác định từ quan hệ chuyển vị - biến dạng:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + 2zu_0^* + 3z^2\theta_x^* + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + 2zv_0^* + 3z^2\theta_y^* + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

Với tấm chịu uốn bởi tải trọng vuông góc với mặt trung bình, ứng suất cắt ngang tại mặt trên và dưới của tấm bằng không, dẫn tới:

$\gamma_{xz}(x,y,\pm h/2) = \gamma_{yz}(x,y,\pm h/2) = 0;$

từ đó ta có: $u_0^* = v_0^* = 0$ (6)

Từ (4), (5), (6) ta tính được:

$$u = u_0 + z\left[\theta_x - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\phi_x\right]; v = v_0 + z\left[\theta_y - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\phi_y\right]; w = w_0 \quad (7)$$

(Với: $\phi_x = \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$ và $\phi_y = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}$)

Trong đó: θ_x, θ_y là góc xoay của pháp tuyến quanh trục y, x tương ứng.

ϕ_x, ϕ_y là góc vặn xoắn của pháp tuyến quanh trục y, x tương ứng.

2.2.1. Biểu thức chuyển vị

Với quan niệm góc xoay θ_x, θ_y là do momen uốn gây ra, góc vặn xoắn ϕ_x, ϕ_y là do ảnh hưởng của lực cắt, trường chuyển vị được giả thiết như sau (Thai et al., 2010):

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2}\frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (8)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\frac{\partial w_b}{\partial y} - \frac{4z^3}{3h^2}\frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (9)$$

$$w(x,y,z) = w_b(x,y) + w_s(x,y) \quad (10)$$

Trong đó: u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương x, y, z.

w_b, w_s là độ võng do momen uốn và do lực cắt gây ra.

2.2.2. Các thành phần biến dạng

Trường biến dạng được suy ra từ trường chuyển vị bằng cách sử dụng quan hệ chuyển vị - biến dạng:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{4z^3}{3h^2}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \frac{4z^3}{3h^2}\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y} - \frac{8z^3}{3h^2}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}; \\ \gamma_{xz} &= \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)\frac{\partial w_s}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)\frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (12)$$

2.2.3. Quan hệ ứng suất - biến dạng

Quan hệ tuyến tính giữa ứng suất - biến dạng của tấm FGM đẳng hướng với mô đun đàn hồi E biến thiên dạng hàm mũ theo chiều dày tấm ở trạng thái ứng suất khối có thể được viết dưới dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Các thành phần trong ma trận độ cứng [Q] ở trên được xác định bởi:

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} = Q_{22}; \quad Q_{12} = \frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu^2(z)} = Q_{21};$$

$$Q_{44} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} = Q_{55} = Q_{66}$$

2.2.3. Các thành phần nội lực

Các thành phần nội lực trong tấm được xác định bởi các biểu thức sau:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz;$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \frac{4z^3}{h^2} dz; \tag{14}$$

$$Q_{yz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \sigma_{yz} dz;$$

$$Q_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \sigma_{xz} dz$$

Biểu diễn các thành phần nội lực (14) theo chuyển vị ta được (15), (16), trong đó, các hệ số A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij} xem chi tiết phụ lục.

2.3. Phương trình chuyển động theo các thành phần chuyển vị

Dựa theo nguyên lý Hamilton ta có hệ phương trình (17) sau:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & F_{11} & F_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & B_{12} & B_{11} & 0 & F_{12} & F_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & F_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & G_{11} & G_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 & D_{12} & D_{11} & 0 & G_{12} & G_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & G_{66} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & G_{11} & G_{12} & 0 & H_{11} & H_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{11} & 0 & G_{12} & G_{11} & 0 & H_{12} & H_{11} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} & 0 & 0 & G_{66} & 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{16}$$

$$\delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_o \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - cI_3 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}$$

$$\delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial y} = I_o \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - cI_3 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}$$

$$\delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1\left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y}\right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - cI_4 \nabla^2 \ddot{w}_s$$

$$\delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + cI_3\left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y}\right) - cI_4 \nabla^2 \ddot{w}_b - c^2 I_6 \nabla^2 \ddot{w}_s \tag{17}$$

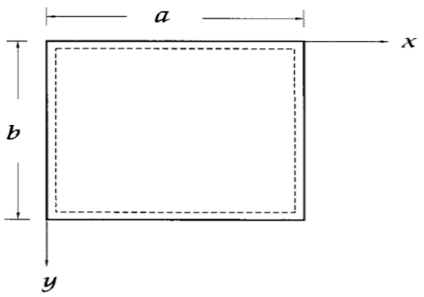
trong đó các thành phần I_i được tính theo công thức sau:

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho\left(1, z, z^2, z^3, z^4, z^5\right) dz \qquad (18)$$

Hệ phương trình trên áp dụng cho bài toán động, đối với bài toán tĩnh thì các thành phần của vế bên phải bằng không.

2.4. Lời giải Navier cho tấm chữ nhật FGM, tựa khớp trên chu vi

Xét tấm chữ nhật FGM với chiều dài a và chiều rộng b tựa khớp trên chu vi như hình 2.



Hình 2. Tấm chữ nhật cạnh a, b, bốn biên tựa khớp.

Theo Navier, hàm chuyển vị được giả định dưới dạng chuỗi lượng giác kép như sau (Thai et al., 2013):

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \cos\alpha x \sin\beta y$$

$$v(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin\alpha x \cos\beta y \qquad (19)$$

$$w_b(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega t} \sin\alpha x \sin\beta y$$

$$w_s(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega t} \sin\alpha x \sin\beta y$$

với $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = \frac{m\pi}{a}$, $\beta = \frac{n\pi}{b}$, (U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}) là các ẩn số, ω là tần số góc.

Hàm tải trọng cũng được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép như sau:

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (20)$$

trong đó: $q_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$.

Khi tải trọng phân bố đều: $q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2}$

Điều kiện biên: $x = 0$: $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, $M_x = 0$; $x = a$: $v_0 = w_0 = 0$, $M_x = 0$.

$y = 0$: $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, $M_y = 0$ $y = b$: $v_0 = w_0 = 0$, $M_y = 0$.

Thế phương trình (19) vào hệ phương trình chuyển động theo chuyển vị (17) ta có:

$$\{[S] - \omega^2 [M]\}\{Q\} = \{q\} \qquad (21)$$

Trong đó: các ma trận, vectơ [S]; [M]; {Q}; {q} xem chi tiết phụ lục.

❖ Khi cho tần số góc ω = 0 ta nhận được phương trình cho bài toán tĩnh:

$$[S]\{Q\} = \{q\} \qquad (22)$$

Giải phương trình (22) ta nhận được các hệ số U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}, từ đó xác định được các thành phần chuyển vị theo (19) và các thành phần ứng suất cho bài toán tĩnh.

❖ Khi cho tải trọng bằng 0, nhận được phương trình cho bài toán dao động riêng:

$$\{[S] - \omega^2 [M]\}\{Q\} = 0 \qquad (23)$$

Đặt $\omega = \sqrt{\lambda}$ hay $\lambda = \omega^2$, bằng phần mềm Matlab, giải bài toán tìm trị riêng của phương trình (23) [S] - λ [M] = 0, ta nhận được tần số dao động riêng của tấm với vật liệu cơ tính biến thiên FGM.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

3.1. Phân tích tĩnh

Ví dụ 1: Kiểm chứng kết quả số của thuật toán và chương trình tính tự viết trong môi trường Matlab

Xét tấm P - FGM vuông (a/b = 1) chịu tải trọng phân bố đều, liên kết gối tựa đơn giản trên chu vi với chiều dày tấm h = 0,01 (m), tỉ số a/h = 10, vật liệu FGM (Al/Al_2O_3) với tính chất các vật liệu thành phần:

- Kim loại (Al): $E_m = 70$ (GPa); $\rho_m = 2.702$ (kg/m^3)

- Ceramic (Al_2O_3): $E_c = 380$ (GPa); $\rho_c = 3.800$ (kg/m^3);

Độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm (*a/2;b/2*) và các thành phần ứng suất của tấm được tính với $m = n = 19$ và được so sánh với kết quả giải tích tính theo lý thuyết biến dạng cắt tổng quát của Zenkour (2006) - chuyển vị biến thiên theo quy luật hàm sin và kết quả tính theo lý thuyết bậc nhất đơn giản của Thai và Kim (2013) thể hiện trên bảng 1.

Giá trị độ võng và ứng suất không thứ nguyên trong các ví dụ dưới đây tính theo Thai và Kim (2013), có dạng như sau:

$$\bar{w} = \frac{10.E_c.h^3}{q_0.a^4}.w(\frac{a}{2};\frac{b}{2});$$

$$\bar{\sigma}_{xx}(z) = \frac{h}{q_0.a}.\sigma_{xx}(\frac{a}{2};\frac{b}{2};z);$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(z) = \frac{h}{q_0.a}.\sigma_{yy}(\frac{a}{2};\frac{b}{2};z);$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(z) = \frac{h}{q_0.a}.\sigma_{xy}(0;0;z);$$

$$\bar{\sigma}_{xz}(z) = \frac{h}{q_0.a}.\sigma_{xz}(0;\frac{b}{2};z)$$

$$\bar{\sigma}_{yz}(z) = \frac{h}{q_0.a}.\sigma_{yz}(\frac{a}{2};0;z)$$

Qua so sánh độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm chữ nhật FGM và các thành phần ứng suất với các chỉ số thể tích p = 0; 1; 10 của bài báo với kết quả giải tích tính theo Zenkour. (2006), Thai và Kim (2013) trên bảng 1 cho thấy các kết quả là tương đồng, như vậy nghiệm giải tích cũng như chương trình tính mà bài báo đã xây dựng là tin cậy.

Ví dụ 2: Khảo sát ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích p đến độ võng

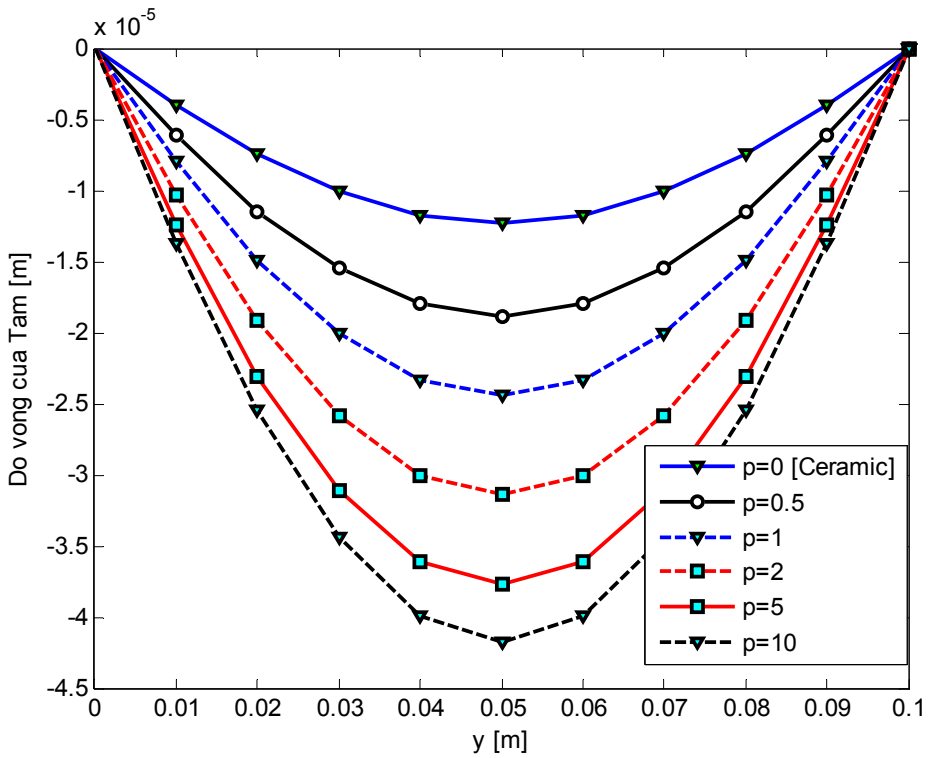
Xét tấm vuông có tỉ số *b/a* = 1, *a/h* = 10. Độ võng tại tâm của tấm FGM với các chỉ số tỷ lệ thể tích p = 0; 0,5; 1; 2; 5; 10 cho trên bảng 2. Đồ thị độ võng của tấm tại mặt cắt x = a/2 với các giá trị p khác nhau biểu diễn trên hình 3.

Bảng 1. Độ võng và các thành phần ứng suất lớn nhất không thứ nguyên của tấm vuông P- FGM liên kết khớp trên chu vi

Mô hình	Chỉ số tỉ lệ thể tích *p*	Tỉ số *b/a* = 1					
		Tỉ số *a/h* = 10					
		$\bar{w}(a/2;b/2)$	$\bar{\sigma}_{xx}(h/2)$	$\bar{\sigma}_{yy}(h/3)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$	$\bar{\sigma}_{yz}(h/6)$	$\bar{\sigma}_{xz}(0)$
SSDT (Zenkour, 2006)	0	0.4665	2.8932	1.9103	1.2850	0.4429	0.5115
FSDT (Thai HT, 2013)		0.4666	2.8732	1.9155	1.2990	0.4004	0.4004
Bài báo		**0.4666**	**2.8913**	**1.9107**	**1.2858**	**0.3914**	**0.4953**
SSDT (Zenkour, 2006)	1	0.9287	4.4745	2.1692	1.1143	0.5441	0.5114
FSDT (Thai HT, 2013)		0.9288	4.4407	2.1767	1.1218	0.4923	0.4004
Bài báo		**0.9288**	**4.4713**	**2.1698**	**1.1146**	**0.5012**	**4.4953**
SSDT (Zenkour, 2006)	10	1.5876	7.3689	1.2820	1.0694	0.4227	0.4552
FSDT (Thai HT, 2013)		1.5697	7.2963	1.2953	1.0853	0.3074	0.2867
Bài báo		**1.5872**	**7.3625**	**1.2832**	**1.0705**	**0.3708**	**0.4377**

Bảng 2. Độ võng $w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ và độ võng không thứ nguyên $\overline{w}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ tại tâm của tấm FGM $(\frac{a}{2};\frac{b}{2})$

Độ võng [m]	Tỉ số *a/h*	Tỉ số *a/b*=1					
		Chỉ số tỉ lệ thể tích (*p*)					
		0	*0.5*	*1*	*2*	*5*	*10*
$w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$	10	-1.2E-05	-1.9E-05	-2.4E-05	-3.1E-05	-3.8E-05	-4.2E-05
$\overline{w}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$		0.4666	0.7154	0.9288	1.194	1.4349	1.5872



Hình 3. Biểu đồ độ võng của tấm tại mặt cắt x = a/2 với các chỉ số tỉ lệ thể tích *p* thay đổi

Từ bảng 2 và hình 3 ta có thể thấy rằng khi chỉ số thể tích *p* tăng lên thì độ cứng của tấm giảm do đó làm cho độ võng của tấm tăng lên.

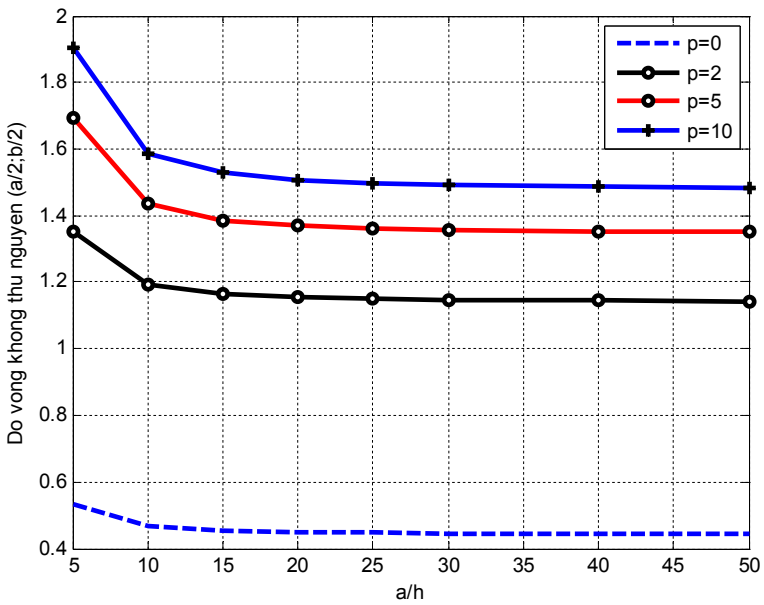
Ví dụ 3: Khảo sát ảnh hưởng của tỉ số a/h đến độ võng

Xét tấm vuông (*b/a*=1), với các tỷ số *a/h* = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 40; 50. Độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm FGM với *p* = 0; 2; 5; 10 cho trên bảng 3. Đồ thị độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm biến thiên theo tỉ số *a/h* biểu diễn trên hình 4.

Từ bảng 3 và hình 4 ta có thể thấy rằng khi tỉ số *a/h* tăng thì độ võng không thứ nguyên của tấm FGM giảm. Khi chỉ số thể tích *p* tăng lên thì độ cứng của tấm giảm làm cho độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm FGM tăng lên.

Bảng 3. Độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm vuông với các tỷ số *a/h*

a/h	b/a	Độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm $\overline{w}(a/2;b/2)$			
		Chỉ số tỉ lệ thể tích (p)			
		0	2	5	10
5	1	0.5354	1.3538	1.6929	1.9059
10		0.4666	1.1940	1.4349	1.5872
15		0.4538	1.1643	1.3870	1.5280
20		0.4494	1.1539	1.3703	1.5073
25		0.4473	1.1491	1.3625	1.4977
30		0.4462	1.1465	1.3583	1.4925
40		0.4450	1.1439	1.3541	1.4873
50		0.4445	1.1427	1.3521	1.4849



Hình 4. Độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm vuông FGM biến thiên theo *a/h*

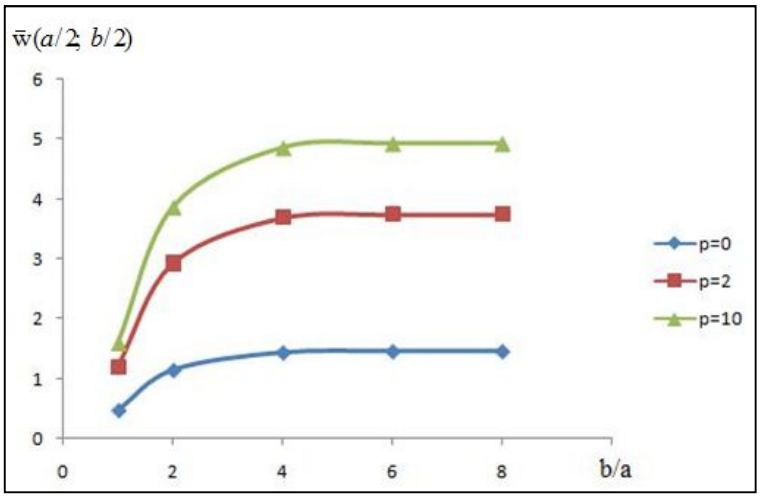
Ví dụ 4: Khảo sát ảnh hưởng của tỉ số b/a đến độ võng

Xét tấm hình chữ nhật FGM có tỷ số *a/h* = 5. Đồ thị biến thiên của độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm với các tỷ số kích thước cạnh *b/a* và chỉ số tỷ lệ thể tích *p* khác nhau (*p = 0; 2; 10*) được biểu diễn trên hình 5.

Ta nhận thấy rằng độ võng tăng nhanh khi tỷ số *b/a* trong khoảng 1 ÷ 4, tốc độ tăng của độ võng giảm dần khi tỷ số *b/a* > 4. Chỉ số thể tích *p* tăng thì độ võng cũng tăng.

Ví dụ 5: Khảo sát ảnh hưởng của tỉ lệ thể tích p đến thành phần ứng suất

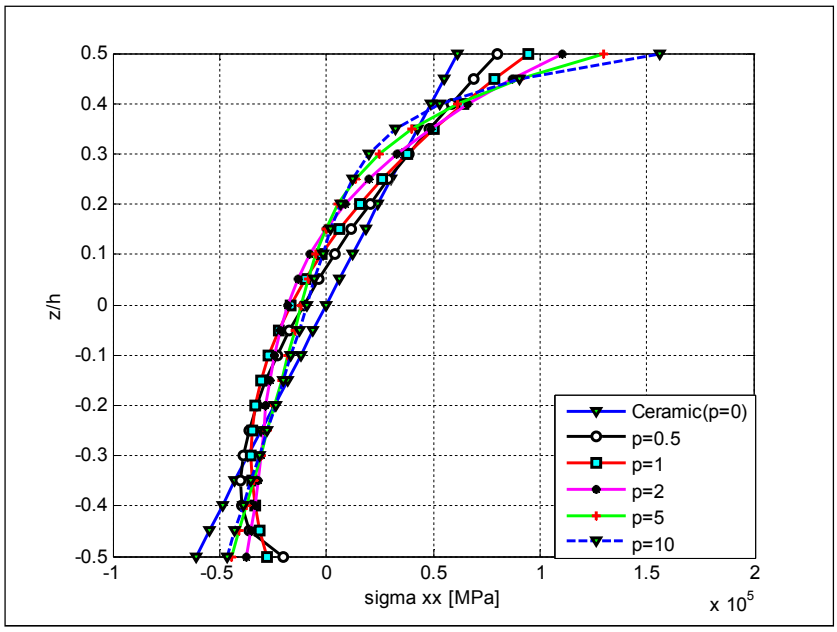
Bảng 4 thể hiện giá trị ứng suất lớn nhất không thứ nguyên của tấm chữ nhật FGM có tỷ số kích thước cạnh *b/a* = 2 và tỷ số *a/h* = 10 với các chỉ số tỷ lệ thể tích *p* = 0; 0.5; 1; 2; 5; 10. Đồ thị các thành phần ứng suất thay đổi theo tọa độ chiều dày tấm thể hiện trên hình 6, 7 và 8.



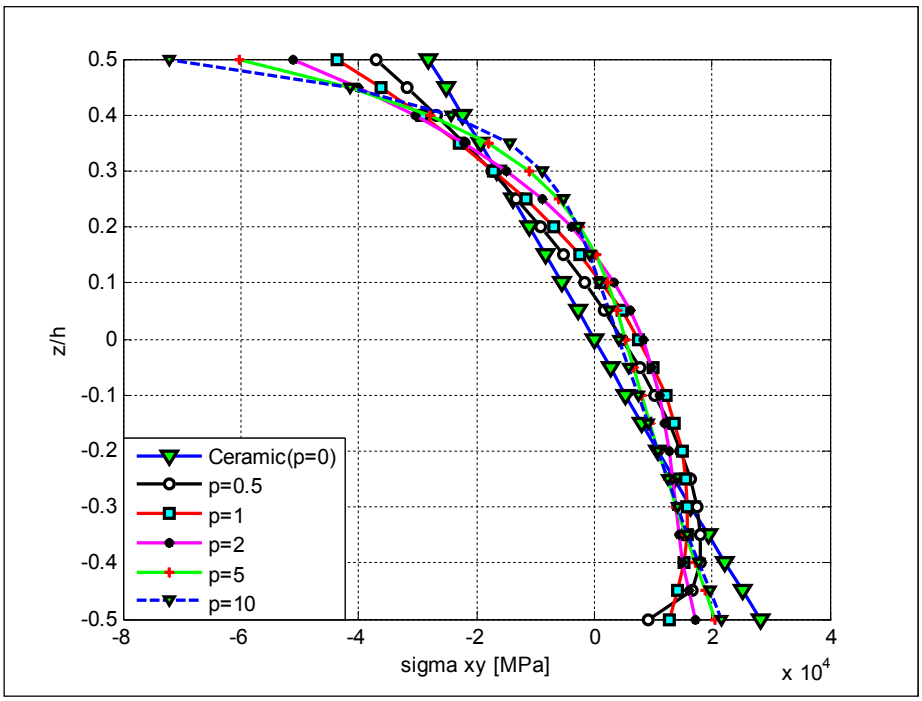
Hình 5. Độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm chữ nhật FGM biến thiên theo *b/a*

Bảng 4. Các thành phần ứng suất của tấm FGM với các chỉ số tỷ lệ thể tích *p*

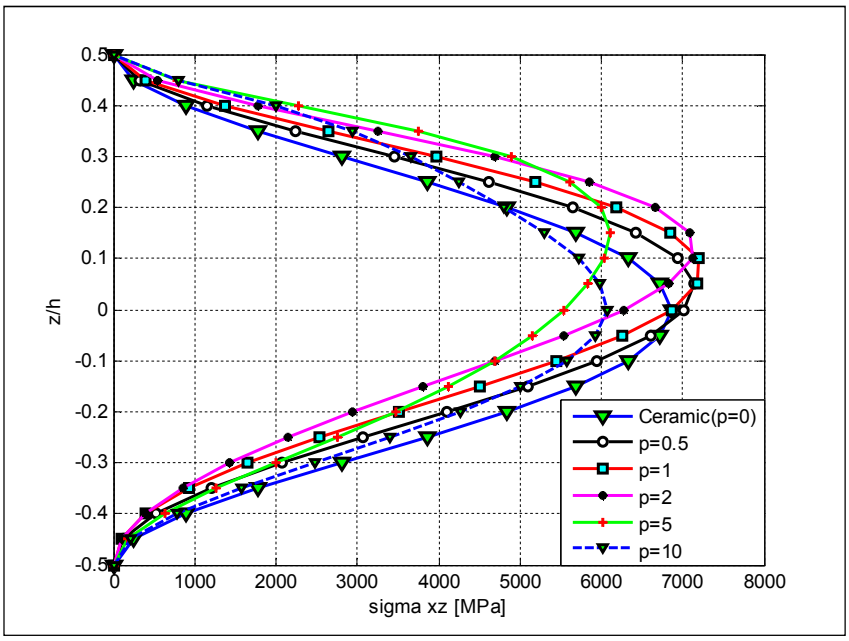
Các thành phần ứng suất	tỉ số *a/h*	tỉ số *b/a*=2					
		Chỉ số tỉ lệ thể tích (*p*)					
		0	0.5	1	2	5	10
$\bar{\sigma}_{xx}(h/2)$	10	6.1268	8.0412	9.4731	11.0477	13.006	15.5874
$\bar{\sigma}_{yy}(h/3)$		1.8512	2.0581	2.1028	1.9730	1.5654	1.2468
$\bar{\sigma}_{xy}(-h/3)$		1.8369	1.7991	1.5904	1.4154	1.4955	1.5309



Hình 6. Ứng suất $\bar{\sigma}_{xx}$ biến thiên theo chiều dày tấm với các giá trị *p*



Hình 7. Ứng suất $\bar{\sigma}_{xy}$ biến thiên theo chiều dày tấm với các giá trị *p*



Hình 8. Ứng suất $\bar{\sigma}_{xz}$ biến thiên theo chiều dày tấm với các giá trị *p*

Ta thấy khi $p = 0$ (vật liệu đẳng hướng ceramic) thì phân bố các thành phần ứng suất pháp $\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},z\right)$ và $\bar{\sigma}_{xy}(0,0,z)$ là tuyến tính theo chiều dày. Với các chỉ số tỉ lệ thể tích $p \neq 0$ biểu đồ ứng suất $\bar{\sigma}_{xx}$ và $\bar{\sigma}_{xy}$ là đường cong phi tuyến. Biểu đồ ứng suất cắt ngang $\bar{\sigma}_{xz}$ là đường cong phi tuyến thỏa mãn điều kiện ứng suất tiếp tại mặt trên và dưới của tấm bằng không.

3.2. Phân tích dao động riêng

Ví dụ 6: Kiểm chứng độ tin cậy của thuật toán và chương trình tính

Xét tấm FGM với kích thước tấm: h = 0.01 (m); *b/a* = 1. Tần số dao động riêng không thứ nguyên tính theo Thai và Kim (2013):

$$\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_c / E_c}$$

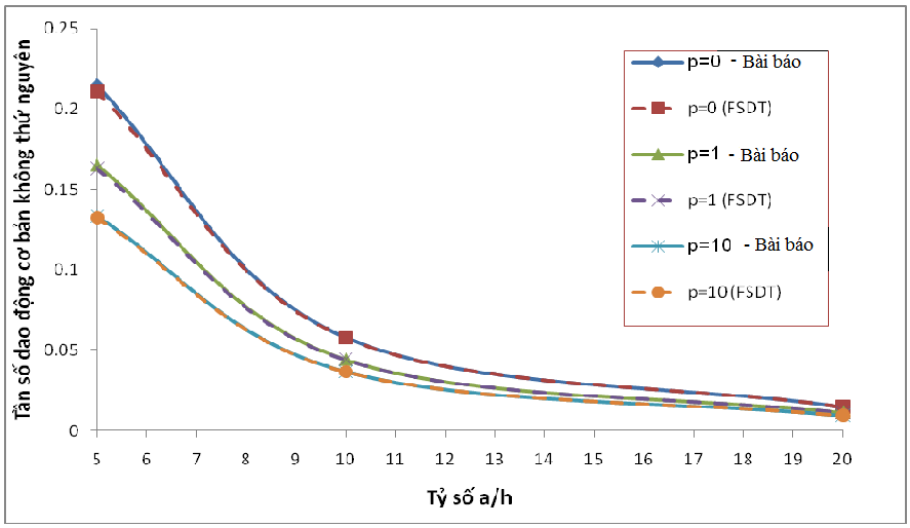
Tần số dao động riêng không thứ nguyên với các tỉ số kích thước *a/h* = 5; 20 và các dạng dao động (*m, n*) khác nhau tính theo nghiệm giải tích của bài báo thể hiện trên bảng 5. Kết quả này được so sánh với tần số dao động riêng không thứ nguyên của Hossein-Hashemi et al. (2010) tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) cũng bằng phương pháp giải tích.

Biến thiên của tần số dao động riêng cơ bản (*m = n = 1*) không thứ nguyên theo tỉ số *a/h* với các chỉ số tỉ lệ thể tích *p* = 0; 1; 10 biểu diễn trên hình 9.

Từ bảng 5 và đồ thị trên hình 9 ta thấy tần số dao động riêng của tấm FGM tính theo nghiệm giải tích của bài báo với kết quả giải tích của Hossein-Hashemi et al. (2010) có sai khác nhỏ (lớn nhất là 4.23%). Như vậy nghiệm giải tích và chương trình tính mà bài báo xây dựng là tin cậy.

Bảng 5. Tần số dao động không thứ nguyên của tấm vuông FGM biên khớp

Tỉ số *a/h*	Mô hình	(m,n)	Tỉ số *b/a*=1				
			Chỉ số tỉ lệ thể tích (*p*)				
			0	0.5	1	4	10
5	FSDT (Hosseini, 2010)	(1,1)	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
	Bài báo		**0.2149**	**0.1834**	**0.1655**	**0.1411**	**0.1337**
	FSDT (Hosseini, 2010)	(1,2)	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
	Bài báo		**0.4773**	**0.4102**	**0.3707**	**0.311**	**0.2912**
	FSDT (Hosseini, 2010)	(2,2)	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
	Bài báo		**0.6971**	**0.6018**	**0.5446**	**0.4524**	**0.4203**
20	FSDT (Hosseini, 2010)	(1,1)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Bài báo		**0.0148**	**0.0126**	**0.0113**	**0.0098**	**0.0094**



Hình 9. Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ biến thiên theo tỷ số *a/h* với các chỉ số tỉ lệ thể tích *p* thay đổi

Ví dụ 7: Khảo sát ảnh hưởng của p đến tần số dao động riêng không thứ nguyên

Xét tấm chữ nhật FGM có *a/h* = 10; *b/a* = 2. Tần số dao động riêng không thứ nguyên của tấm theo nghiệm giải tích với chỉ số thể tích *p* = 0; 0.5; 1; 4; 10 được cho trên bảng 6. Quan hệ giữa tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$ và chỉ số thể tích *p* được biểu diễn trên hình 10.

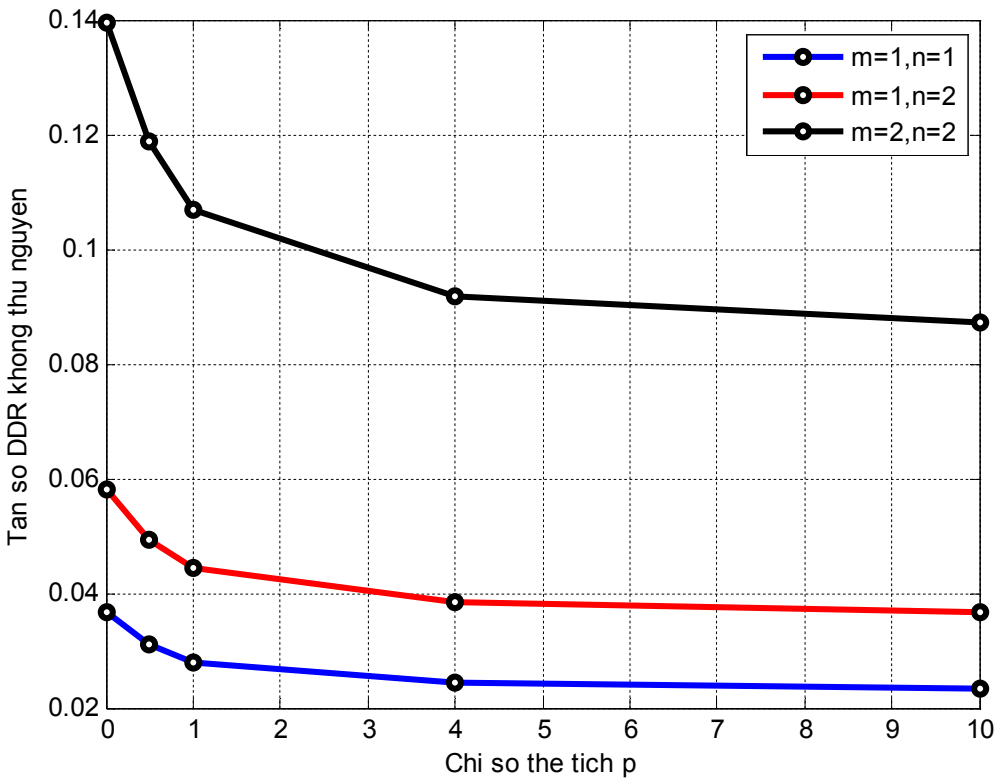
Từ bảng 6 và hình 10 ta thấy rằng khi chỉ số thể tích *p* tăng lên hay nói cách khác khi hàm lượng của gốm - Al_2O_3 trong vật liệu FGM giảm thì tần số dao động riêng của tấm giảm.

Ví dụ 8: Khảo sát ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tần số dao động riêng không thứ nguyên

Xét tấm chữ nhật FGM với các tính chất vật liệu như trên và có tỉ lệ kích thước *b/a* = 2, chỉ số thể tích *p* = 10. Tần số dao động riêng của tấm với các tỉ số a/h khác nhau thể hiện trên bảng 7 và biểu diễn bằng đồ thị trên hình 11.

Bảng 6. Tần số dao động riêng của tấm FGM (*a/h*=10); (*b/a*=2)

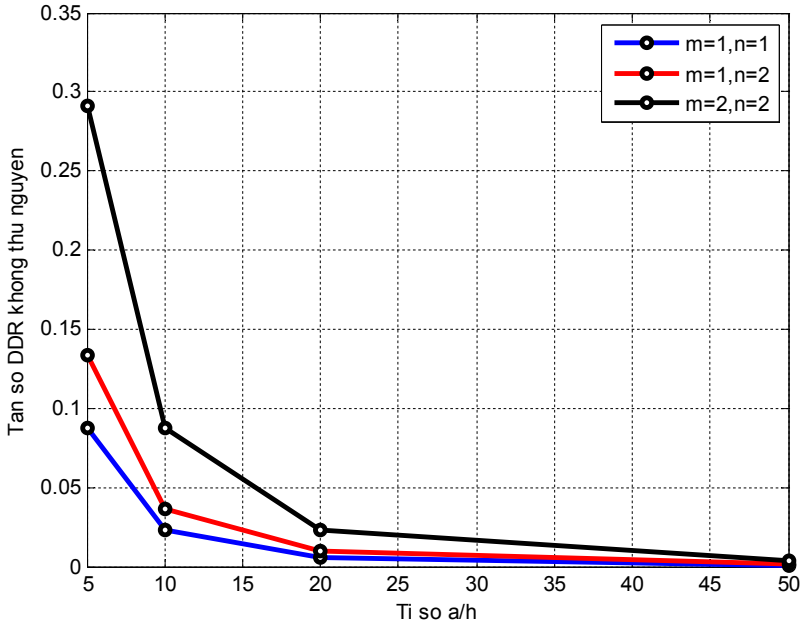
Tần số dao động riêng KTN	tỉ số *a/h*	(m,n)	Tỉ số *b/a* = 2				
			Chỉ số tỉ lệ thể tích (*p*)				
			0	0.5	1	4	10
$\bar{\omega}$	10	(1,1)	0.0366	0.0311	0.028	0.0243	0.0232
		(1,2)	0.058	0.0492	0.0444	0.0384	0.0367
		(2,2)	0.1393	0.1186	0.107	0.0917	0.0873



Hình 10. Tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$ biến thiên theo chỉ số tỉ lệ thể tích *p*

Bảng 7. Tần số dao động riêng của tấm FGM (với *p* = 10; *b/a* = 2)

Tần số dao động riêng KTN	Chỉ số tỉ lệ thể tích (*p*)	(m,n)	Tỉ số *b/a*=2			
			tỉ số *a/h*			
			5	10	20	50
$\bar{\omega}$	10	(1,1)	0.0873	0.0232	0.0059	0.0001
		(1,2)	0.1337	0.0367	0.0094	0.0015
		(2,2)	0.2912	0.0873	0.0232	0.0038



Hình 11. Tần số dao động không thứ nguyên $\bar{\omega}$ khi *a/h* thay đổi

Quan sát đồ thị trên hình 11 ta thấy khi tỷ số *a/h* tăng lên thì tần số dao động riêng không thứ nguyên của tấm FGM giảm.

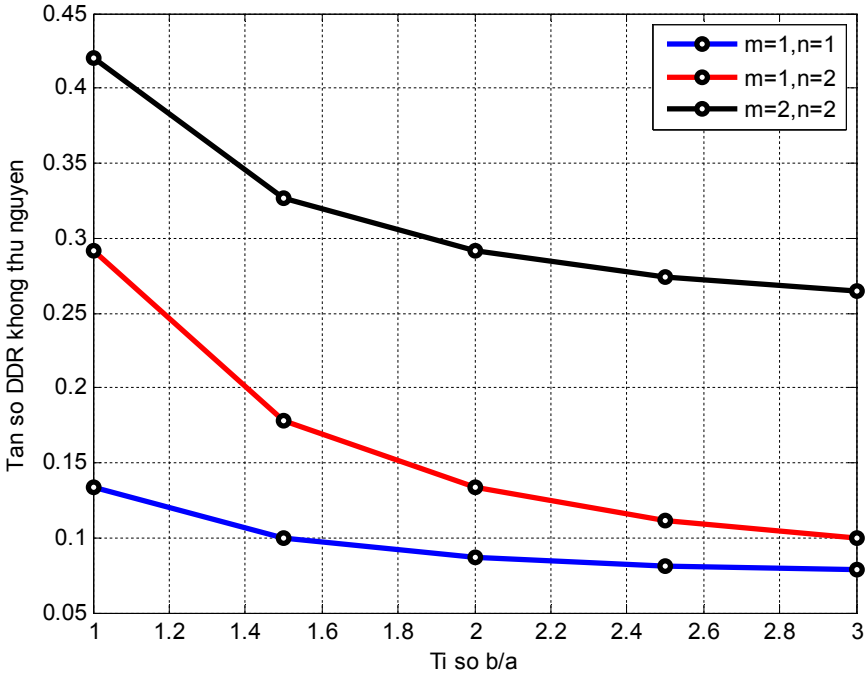
Ví dụ 9: Khảo sát ảnh hưởng của tỷ số b/a đến tần số dao động riêng không thứ nguyên

Xét tấm chữ nhật FGM có tỷ số chiều dày *a/h*=5, chỉ số thể tích *p*=10. Tần số dao động riêng không thứ nguyên của tấm theo nghiệm giải tích được cho trên bảng 8.

Từ biểu đồ trên hình 12 ta thấy khi tỷ số *b/a* tăng lên thì tần số dao động không thứ nguyên của tấm $\bar{\omega}$ giảm.

Bảng 8. Tần số dao động riêng của tấm FGM *(p=10); (a/h=5)*

Tần số dao động riêng KTN	Chỉ số tỉ lệ thể tích (*p*)	(m,n)	Tỉ số *a/h*=5				
			tỉ số *b/a*				
			1	1.5	2	2.5	3
$\bar{\omega}$	10	(1,1)	0.1337	0.0997	0.0873	0.0815	0.0783
		(1,2)	0.2912	0.1783	0.1337	0.1119	0.0997
		(2,2)	0.4203	0.3268	0.2912	0.2741	0.2646



Hình 12. Tần số dao động không thứ nguyên $\bar{\omega}$ khi *b/a* thay đổi

4. KẾT LUẬN

Bằng chương trình tính toán số được viết trên nền Matlab, tiến hành khảo sát số các lớp bài toán, kết quả tính theo nghiệm giải tích mà bài báo nêu đã được so sánh với các kết quả của một số tác giả khác trong tài liệu tham khảo cho thấy độ tin cậy của lời giải.

Ảnh hưởng của chỉ số tỉ lệ thể tích *p*, tỉ số kích thước *b/a*, tỉ số *a/h* đến độ võng, ứng suất và tần số dao động riêng của tấm FGM đã được khảo sát.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Javaheri R., Eslami M.R. (2002). Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading, J. Appl. Math. Mech., 82(4): 277-283.

Zhang D.G., Zhou Y.H. (2008). A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface, Comput. Mater. Sci., 44(2): 716-720.

Mohammadi M., Saidi A.R., Jomehzadeh E. (2010). Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates, Appl. Compos. Mater., 17(2): 81-93.

Bodaghi M., Saidi A.R. (2011). Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation, Arch. Appl. Mech., 81(6): 765-780.

Della Croce L., Venini P. (2004). Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 193(9-11): 705-725.

Ganapathi M., Prakash T., Sundararajan N. (2006). Influence of functionally graded material on buckling of skew plates under mechanical loads, J. Eng. Mech., 132(8): 902-905.

Zhao X., Liew K.M. (2009). Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 198(33-36): 2796-2811.

Zhao X., Lee Y.Y., Liew K.M. (2009). Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, J. Sound Vib., 319(3-5): 918-939.

Lee Y.Y., Zhao X., Reddy J.N. (2010). Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 199(25-28): 1645-1653.

Hosseini-Hashemi S., Rokni Damavandi Taher H., Akhavan H., Omidi M. (2010). Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-

order shear deformation plate theory, Appl. Math. Model., 34(5): 1276-1291.

Hosseini-Hashemi S., Fadaee M., Atashipour S.R. (2011). A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates, Int. J. Mech. Sci., 53(1): 11-22.

Reddy JN. (2000). Analysis of functionally graded plates, Int. J. Numer. Methods Eng., 47(1-3): 663-684.

Karama M., Afaq K.S., Mistou S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Struct., 40(6): 1525-1546.

ZenkourA.M. (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1-Deflection and stresses, Int. J. Solids Struct., 42 (18-19): 5224-5242.

Zenkour A.M. (2005). A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2-Buckling and free vibration, Int. J. Solids Struct., 42(18-19): 5243-5258.

Zenkour A.M. (2006). Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates, Appl. Math. Model., 30 (1): 67-84

Benyoucef S., Mechab I., Tounsi A., Fekrar A., Ait Atmane H., Adda Bedia E.A. (2010). Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations, Mech. Compos. Mater., 46(4): 425-434.

Atmane H.A., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A. (2010). Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory, Int. J Mech. Mater. Design, 6(2): 113-121.

Mantari J. L., Oktem A.S., Guedes Soares C. (2012). Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory, Compos. Struct., 94(2): 714-723.

Pradyumna S, Bandyopadhyay JN. (2008). Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation, J. Sound. Vib., 318(1-2): 176-192.

Neves AMA., Ferreira AJM., Carrera E, Roque CMC, Cinefra M, Jorge RMN et al. (2012). A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, Compos. Part B: Eng., 43(2): 711-25.

Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN et al. (2012). A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. Compos. Struct, 94(5): 1814-25.

Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E et al. (2012). Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique, Compos. Part B: Eng., 44(1): 657-674.

Reddy JN (2011). A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates, Int. J. Aeros. Lightw.Struct., 1(1): 1-21

Talha M, Singh BN. Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory, Appl. Math. Modell, 34(12): 3991-4011.

Thai HT, Kim SE (2010). Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory, Int J Mech Sci., 52(4): 626-33.

Thai HT, Kim SE (2013). A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates, Composite Structures, 96: 165-173.

PHỤ LỤC

1. Các hệ số của phương trình (15), (16):

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}dz \ ; \ B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}zdz \ ; \ D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}z^2dz$$

$$F_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{4z^3}{3h^2}Q_{ij}dz \ ; \ G_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{4z^4}{3h^2}Q_{ij}dz \ ; \ H_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{4z^3}{3h^2}\right)^2 Q_{ij}dz \text{, (i, j = 1,2,6)}$$

2. Các ma trận của phương trình (21), (22), (23):

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix}$$

Với:

$$s_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \ ; \ s_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \ ;$$
$$s_{13} = -B_{11}\alpha(\alpha^2 + \beta^2)$$
$$s_{13} = -F_{11}\alpha(\alpha^2 + \beta^2) \ ; s_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{11}\beta^2 \ ;$$
$$s_{23} = -B_{11}\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$
$$s_{24} = -F_{11}\beta(\alpha^2 + \beta^2) \ ; s_{33} = D_{11}(\alpha^2 + \beta^2)^2 \ ;$$
$$s_{34} = G_{11}(\alpha^2 + \beta^2)^2$$
$$s_{44} = H_{11}(\alpha^2 + \beta^2)^2 + A_{44}(\alpha^2 + \beta^2)^2$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

Với:

$$m_{11} = m_{12} = I_0 \ ; m_{13} = -\alpha I_1 \ ; m_{14} = -\alpha c I_1$$
$$m_{23} = -\beta I_1 \ ; \ m_{24} = -\beta c I_3 \ ; \ m_{33} = I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2)$$
$$m_{34} = I_0 + cI_4(\alpha^2 + \beta^2) \ ; \ m_{44} = I_0 + c^2 I_6(\alpha^2 + \beta^2)$$

và $c = \frac{4}{3}h^2$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} ; \ \{q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ q_{mn} \end{Bmatrix}$$