PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG MẢNH VỎ CẦU THOẢI CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN TRONG MÔI TRƯỜNG Nhiệt độ bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Dương Thành Huân

Khoa Cơ - Điện, Học viện Nông nghiệp Việt Nam

Tác giả liên hệ: dthuan@vnua.edu.vn

Ngày nhận bài: 26.12.2019

Ngày chấp nhận đăng: 14.02.2020

TÓM TẮT

Mục tiêu của nghiên cứu này là phân tích dao dao động tự do và dao động cưỡng bức của mảnh vỏ cầu thoải FGM trong môi trường nhiệt độ. Bài báo sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn với phần tử 3D suy biến dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để xây dựng mô hình tính toán. Mô đun đàn hồi kéo (nén) của vật liệu được giả thiết phụ thuộc vào nhiệt độ và biến thiên theo qui luật hàm mũ, hệ số Poisson là hằng số và nhiệt độ được giả thiết là biến đổi phi tuyến theo chiều dày panel. Kết quả nghiên cứu đã cho thấy độ tin cậy của thuật toán và chương trình được khẳng định thông qua ví dụ kiểm chứng so sánh với kết quả đã công bố của các tác giả khác. Mặt khác, ảnh hưởng của tham số vật liệu, kích thước hình học, điều kiện biên, tỉ lệ cản, tỉ số tần số của lực cưỡng bức/tần số dao động riêng (tỉ số Ω/ω) đến đáp ứng động của Panel trong môi trường nhiệt độ cũng đã được khảo sát trong nghiên cứu này. Từ đó, bài báo đã rút ra những nhận xét, kết luận có ý nghĩa hữu ích về mặt khoa học và kỹ thuật.

Từ khóa: Vật liệu có cơ tính biến thiên, panel cầu, phân tích động, phương pháp phần tử hữu hạn.

Dynamic Analysis of Functionally Graded Spherical Panel in Thermal Environment by Finite Element Method

ABSTRACT

In this study, based on the first shear deformation theory (FSDT), a finite element model using a 3D-Degenerated shell element is developed for dynamic analysis of functionally graded spherical shell panel in the thermal environment. The modulus of elasticity is assumed to be temperature-dependent and graded in the thickness direction according to the simple power-law distribution, while the Poisson factor is assumed to be constant and the temperature is assumed to be nonlinear variation in the thickness direction. The numerical results are also compared with the results available in the literature to validate the present model. On the other hand, the effect of material parameters, geometric dimensions, boundary conditions; damping factor; ratio of forced frequency/natural frequency (ratio Ω/ω) on the dynamic behavior of FG spherical shell panel in the thermal environment are also investigated in detail and some useful conclusions are drawn.

Keywords: Functionally graded material (FGM), spherical shell panel, vibration analysis, finite element method (FEM).

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM -Functionally graded material) là vật liệu composite thế hệ mới với cơ tính biến đổi trơn và liên tục từ bề mặt này sang bề mặt khác của kết cấu. Vật liệu FGM được chế tạo từ sự kết hợp giữa kim loại và gốm. Nhờ đặc tính kháng nhiệt cao của gốm và độ bền uốn của kim loại nên vật liệu FGM là loại vật liệu phù hợp để chế tạo các kết cấu hay cấu kiện làm việc trong môi trường nhiệt đô cao. Nhờ những đặc tính nối trội so với vật liệu truyền thống nên vật liệu FGM thu hút sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học, do đó đã có nhiều công trình nghiên cứu liên quan đến vật liệu FGM được công bố. Một số nghiên cứu liên quan đến ứng xử cơ học của vật liệu FGM trong môi trường nhiệt độ có thể kể đến như: Với giả thiết cơ tính của vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ, dao động tự do của côn FGM (Malekzadeh & cs., 2012) và vỏ trụ tròn quay FGM (Malekzadeh & Heydarpour, 2012) trong

môi trường nhiệt được Malekzadeh & cs. (2012) phân tích bằng phương pháp vi phân cầu phương. Haddadpour & cs. (2007) phân tích dao động riêng vỏ trụ tròn FGM với bốn trường hợp điều kiện biên khác nhau dựa trên lý thuyết vỏ Love. Jooybar & cs. (2016) sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) để xây dựng mô hình nghiên cứu ảnh hưởng nhiệt đô đến dao đông riêng của vỏ nón cut FGM, trong đó hàm biến thiên nhiệt độ được xác định thông qua việc giải phương trình truyền nhiệt. Pradyumna & Bandyopadhyay (2010) khảo sát dao động riêng và ổn định của vỏ FGM hai độ cong chịu nén trong mặt trung bình trong môi trường nhiệt bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Kandasamy & cs. (2016) nghiên cứu dao động riêng và ổn định nhiệt của kết cấu tấm và vỏ FGM trong môi trường nhiệt bằng phương pháp PTHH dựa trên lý thuyết FSDT. Sheng & Wang (2008) khảo sát ảnh hưởng của tải trong nhiệt đến dao động, ổn định và ổn định động của vỏ trụ tròn FGM bao quanh bởi môi trường đàn hồi. Lý thuyết vỏ bậc nhất và phương trình truyền nhiệt được sử dụng để xác định hàm biến thiên nhiệt độ theo chiều dày vỏ. Kadoli & Ganesan (2006) phân tích dao đông riêng và ổn đinh nhiệt của vỏ tru tròn FGM liên kết ngàm hai đầu.

Nghiên cứu về ảnh hưởng của nhiệt độ đến các kết cấu dầm, tấm, vỏ FGM là thế mạnh của nhiều nhóm nghiên cứu Việt Nam trong những năm gần đây. Duc & Tung (2010; 2011) đã nghiên cứu ổn định phi tuyến của tấm FGM dưới tác dụng đồng thời của tải cơ - nhiệt; ứng xử phi tuyến của panel trụ FGM đặt trên nền đàn hồi dưới tác dụng của tải trọng cơ - nhiệt (Tung & Duc, 2014). Duc & Quan (2013) nghiên cứu về ứng xử sau ổn định phi tuyến của vỏ mỏng P-FGM hai độ cong có gân gia cường trên nền đàn hồi trong môi trường nhiệt. Duc & Cong

$$\begin{split} \mathbf{E}(\mathbf{z}, \mathbf{T}) &= \mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{T}) + \left[\mathbf{E}_{\mathrm{c}}(\mathbf{T}) - \mathbf{E}_{\mathrm{m}}(\mathbf{T})\right] \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{h}} + \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{p}} \\ \alpha(\mathbf{z}, \mathbf{T}) &= \alpha_{\mathrm{m}}(\mathbf{T}) + \left[\alpha_{\mathrm{c}}(\mathbf{T}) - \alpha_{\mathrm{m}}(\mathbf{T})\right] \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{h}} + \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{p}} \\ \kappa(\mathbf{z}) &= \kappa_{\mathrm{m}} + \left[\kappa_{\mathrm{c}} - \kappa_{\mathrm{m}}\right] \left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{h}} + \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{p}}; \end{split}$$

(2013) nghiên cứu ứng xử sau ổn định của tấm S-FGM trên nền đàn hồi sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT). Bich và Tung (Bich and Van Tung 2011) khảo sát ứng xử phi tuyến của vỏ cầu thoải FGM chịu tác dụng của áp lực phân bố đều có kể đến ảnh hưởng nhiệt độ. Bich & Dung (2012) phân tích phi tuyến tĩnh và ổn định động lực của vỏ cầu thoải FGM trong môi trường nhiệt. Bich & cs. (2016), Ninh & Bich (2016) phân tích ứng xử phi tuyến của các kết cấu tấm, vỏ có cơ tính biến thiên (FGM) có gân gia cường chịu ảnh hưởng của nhiệt độ.

Trong nghiên cứu này, dao động tự do và đáp ứng động của vỏ cầu FGM trong môi trường nhiệt độ được khảo sát bằng mô hình phần tử hữu hạn sử dụng phần tử 3D suy biến dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Tính chất của vật liệu được giả thiết phụ thuộc vào nhiệt độ và biến đổi dọc theo chiều dày tấm theo quy luật hàm lũy thừa. Các kết quả số được khảo sát cho thấy ảnh hưởng của tham số vật liệu, kích thước hình học và lực kích thích đến đáp ứng động của vỏ cầu thoải FGM.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Vật liệu FGM trong môi trường nhiệt độ

Bài báo giới hạn nghiên cứu đối với vật liệu P-FGM trong môi trường nhiệt độ. Cơ tính của các vật liệu thành phần phụ thuộc vào nhiệt độ được tính theo công thức sau (Touloukian 1966):

$$P(z, T) = P_m(T) + \left[P_c(T) - P_m(T)\right]V_c \qquad (1)$$

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \qquad (2)$$

Với p là chỉ số tỉ lệ thể tích và theo đó các tính chất hiệu dụng có thể được biểu diễn theo công thức (3), (4) và (5).

$$\kappa(z) = \kappa_{\rm m} + \left[\kappa_{\rm c} - \kappa_{\rm m}\right] \left(\frac{z}{\rm h} + \frac{1}{2}\right)^{\rm p}; \tag{5}$$

Thực tế, các hệ số v_c và v_m có giá trị xấp xỉ nhau, một số khảo sát của các tác giả khác cũng chỉ ra rằng, khi tính toán với hệ số Poisson biến đổi theo chiều dày vỏ có sai số rất nhỏ so với trường hợp coi hệ số này là hằng số. Do vậy, để đơn giản cho việc tính toán, trong nghiên cứu này, hệ số Poisson được coi là hằng số (v = const).

Tính chất hiệu dụng của vật liệu có thể được xác định theo ba quy luật truyền nhiệt là truyền nhiệt đều, truyền nhiệt tuyến tính và truyền nhiệt phi tuyến (Praveen & Reddy, 1998; Reddy, 2000; Javaheri & Eslami, 2002).

Hàm biến thiên nhiệt độ với quy luật truyền nhiệt đều:

$$T(z) = T_m + \Delta T \text{ với } \Delta T = T_c - T_m$$
(6)

Hàm biến thiên nhiệt độ với quy luật truyền nhiệt tuyến tính:

$$T(z) = T_{m} + \Delta T(z)$$

Với $\Delta T(z) = (T_{c} - T_{m}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)$ (7)

Hàm biến thiên nhiệt độ với quy luật truyền nhiệt phi tuyến:

$$\begin{split} T(z) &= T_{\rm m} + \Delta T \ (z) \\ V & \text{ôi} \ \Delta T \Big(z \Big) \!=\! \Big(T_{\rm c} - T_{\rm m} \Big) \eta \Big(z \Big) \ (8) \end{split}$$

Trong đó $\eta(z)$ theo phương trình 8.a, X theo phương trình 8.b và C theo phương trình 8.c.

2.2. Mô hình PTHH mảnh vỏ thoải hai độ cong FGM

Xét mảnh vỏ thoải hai độ cong FGM có hình chiếu bằng là hình chữ nhật kích thước a \times b, chiều dày không đổi h, bán kính cong theo hai phương x, y lần lượt là R_x , R_y (Hình 1). Hình dạng bề mặt được mô tả bởi hàm số có dạng:

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2R_x} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2R_y} \left(y - \frac{b}{2}\right)^2$$

Khi $R_x = R_y = R$, a = b mảnh vỏ hai độ cong là mảnh vỏ cầu.

$$\eta(z) = \frac{1}{C} \left[X - \frac{\kappa_{cm}}{(p+1)\kappa_{m}} X^{p+1} + \frac{\kappa_{cm}^{2}}{(2p+1)\kappa_{m}^{2}} X^{2p+1} - \frac{\kappa_{cm}^{3}}{(3p+1)\kappa_{m}^{3}} X^{3p+1} \right]$$

$$\left[+ \frac{\kappa_{cm}^{4}}{(4p+1)\kappa_{m}^{4}} X^{4p+1} - \frac{\kappa_{cm}^{5}}{(5p+1)\kappa_{m}^{5}} X^{5p+1} \right]$$
(8.a)

$$X = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right); \ \kappa_{cm} = \kappa_{c} - \kappa_{m}$$
(8.b)

$$C = 1 - \frac{\kappa_{cm}}{(p+1)\kappa_{m}} + \frac{\kappa_{cm}^{2}}{(2p+1)\kappa_{m}^{2}} - \frac{\kappa_{cm}^{3}}{(3p+1)\kappa_{m}^{3}} + \frac{\kappa_{cm}^{4}}{(4p+1)\kappa_{m}^{4}} - \frac{\kappa_{cm}^{5}}{(5p+1)\kappa_{m}^{5}}$$
(8.c)

$$\begin{cases} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{cases} = \sum_{i=1}^{8} \mathbf{N}_{i} \left(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \right) \left[\begin{cases} \mathbf{u}_{0i} \\ \mathbf{v}_{0i} \\ \mathbf{w}_{0i} \end{cases} + \zeta \frac{\mathbf{h}}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{l}_{2i} & \mathbf{l}_{1i} \\ -\mathbf{m}_{2i} & \mathbf{m}_{1i} \\ -\mathbf{n}_{2i} & \mathbf{n}_{1i} \end{bmatrix} \begin{cases} \boldsymbol{\theta}_{xi} \\ \boldsymbol{\theta}_{yi} \end{cases} \right]$$
(9)



Hình 1. Mảnh vỏ cầu thoải FGM

2.2.1. Trường chuyển vị

Phần tử 3D suy biến 8 nút dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (Ahmad & cs., 1970) được lựa chọn để thiết lập mô hình phần tử hữu hạn cho mảnh vỏ cầu thoải. Chuyển vị của một điểm bất kỳ thuộc phần tử được xác định theo công thức (9).

Trong đó $\mathbf{u}_{0i}, \mathbf{v}_{0i}, \mathbf{w}_{0i}$ là các chuyển vị thẳng theo các phương x, y, z của điểm trên mặt trung bình; θ_{xi}, θ_{yi} là các góc xoay của đoạn pháp tuyến. $\{\mathbf{l}_{2i} \quad \mathbf{m}_{2i} \quad \mathbf{n}_{2i}\}^{\mathrm{T}}$ và $\{\mathbf{l}_{1i} \quad \mathbf{m}_{1i} \quad \mathbf{n}_{1i}\}^{\mathrm{T}}$ là các cosin chỉ phương của hai véc tơ $\vec{\mathbf{V}}_{1}, \vec{\mathbf{V}}_{2}$ và được xác định như sau:

$$\vec{\mathbf{V}}_{1i} = \vec{\mathbf{j}} \wedge \vec{\mathbf{V}}_{3i} = \mathbf{V}_{3i}^{z} \vec{\mathbf{i}} - \mathbf{V}_{3i}^{x} \vec{\mathbf{k}}$$
(10)

$$V_{2i} = V_{3i} \Lambda V_{1i} \tag{11}$$

Trong đó $\vec{V}_{_3}$ là véc tơ chỉ phương theo chiều dày tại 1 điểm bất kỳ và được tính theo công thức 12.

2.2.2. Trường biến dạng

Các thành phần biến dạng thu được từ đạo hàm của các thành phần chuyển vị, với giả thiết bỏ qua biến dạng và ứng suất pháp theo phương chiều dày, ta được các thành phần biến dạng trong hệ tọa độ phần tử

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}' \right\} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}'} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}'} \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}'\mathbf{y}'} \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{x}'\mathbf{z}'} \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{y}'\mathbf{z}'} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}'} \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{y}'} \\ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{y}'} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{x}'} \\ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{z}'} + \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial \mathbf{x}'} \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{z}'} + \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial \mathbf{y}'} \end{cases}$$
(13)

2.2.3. Trường ứng suất

Quan hệ ứng suất - biến dạng có kể đến ảnh hưởng của nhiệt độ cho bởi công thức (14).

Trong đó, các hệ số Q_{ij} được xác định theo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} &= \mathbf{Q}_{22} = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{z},\mathbf{T})}{1-\nu^2}; \ \mathbf{Q}_{12} = \frac{\nu \mathbf{E}(\mathbf{z},\mathbf{T})}{1-\nu^2}; \\ \mathbf{Q}_{44} &= \mathbf{Q}_{55} = \mathbf{Q}_{66} = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{z},\mathbf{T})}{2(1+\nu)} \end{aligned} \tag{15}$$

$$V \acute{o}i \ \alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \alpha(\mathbf{z},\mathbf{T}). \end{aligned}$$

2.2.4. Phương trình phần tử hữu hạn

Thay các đại lượng biến dạng và ứng suất vào nguyên lý Halminton, thực hiện các phép biến đổi và rút gọn, thu được hệ phương trình chuyển động của vỏ như sau:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} \{ \ddot{\mathbf{u}} \} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{g} \end{bmatrix}] \{ \mathbf{u} \} = \{ \mathbf{P} \}$$
(16)

$$\vec{\mathbf{v}}_{3}^{K} = \begin{cases} \mathbf{l}_{3} \\ \mathbf{m}_{3} \\ \mathbf{n}_{3} \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}^{2} \left(\mathbf{x}_{K}, \mathbf{y}_{K}\right) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}^{2} \left(\mathbf{x}_{K}, \mathbf{y}_{K}\right) + 1}} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \left(\mathbf{x}_{K}, \mathbf{y}_{K}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} \left(\mathbf{x}_{K}, \mathbf{y}_{K}\right) \\ 1 \end{cases}$$
(12)

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \left\{ \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{xx} \Delta T \\ \alpha_{yy} \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$
(14)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} \{ \ddot{\mathbf{u}} \} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix} \{ \dot{\mathbf{u}} \} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^g \end{bmatrix} \end{bmatrix} \{ \mathbf{u} \} = \{ \mathbf{P} \}$$
(17)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{e} \end{bmatrix} = \sum \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1+1} \rho \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{A} + \zeta \mathbf{N}_{B} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{A} + \zeta \mathbf{N}_{B} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \mathbf{J} \end{bmatrix} d\xi d\eta d\zeta$$
(18)

1004

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{e} \end{bmatrix} = \sum \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1+1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{e} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{\dagger} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \mathbf{J} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \mathbf{J} \end{bmatrix} d\xi d\eta d\zeta$$
(19)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{g} \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{g}_{e} \end{bmatrix} = \sum \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{H} d\xi d\eta$$
(20)

$$\left\{P\right\} = \sum \left\{P_{e}\right\} = \sum \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[N_{A} + N_{B}\right]^{T} \left\{p_{x} \atop p_{y} \atop p_{z}}\right\} \left[G\right] d\xi d\eta$$

$$(21)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} + \mathbf{a}_2 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathrm{g}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$
(22)

Khi kể đến cản kết cấu, hệ phương trình chuyển động của vỏ như công thức (17)

Trong đó: [M] theo phương trình (18), [K] theo công thức (19), [K^g] theo công thức (20), $\{P\}$ theo công thức (21), [C] theo công thức (22).

Với a_1 , a_2 là các hệ số cản. Khi không kể đến cản và tải trọng ngoài, ta có hệ phương trình dao động tự do của vỏ có dạng:

$$\left[\mathbf{M}\right]\left\{\ddot{\mathbf{u}}\right\} + \left[\left[\mathbf{K}\right] + \left[\mathbf{K}^{g}\right]\right]\left\{\mathbf{u}\right\} = \left\{\mathbf{0}\right\}$$
(23)

Áp đặt điều kiện biên và giải hệ phương trình (23), ta được tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của vỏ, trường hợp dao động cưỡng bức ta giải hệ phương trình (17) bằng phương pháp tích phân trực tiếp Newmark sẽ thu được các đáp ứng động của vỏ FGM trong môi trường nhiệt độ.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trong phần này, ảnh hưởng của các thông số vật liệu, kích thước hình học, nhiệt độ... đến ứng xử động của mảnh vỏ cầu thoải FGM được khảo sát và rút ra những nhận xét, kết luận.

3.1. Kết quả kiểm chứng

Hai ví dụ kiểm chứng sau đây được thực hiện nhằm kiểm tra độ tin cậy của lời giải PTHH và chương trình máy tính đã thiết lập. Ngoài ra, nghiên cứu cũng đã thực hiện kiểm tra tính hội tụ của chương trình và lựa chọn lưới 14×14 phần tử để thực hiện các tính toán khảo sát trong các ví dụ. Trong các ví dụ số, vật liệu được sử dụng có cơ tính như trong bảng 1.

3.1.1. Ví dụ KC1 - Tần số dao động riêng của vỏ FGM hai độ cong

Xét mảnh vỏ thoải FGM hai độ cong bốn biên tựa khớp được làm bởi Si₃N₄ và SUS304 có cơ tính được trình bày trong bảng 1 có: h = 0,001 (m); a/b = 1; b/h = 10; a/R_x = 0,1; b/R_y = 0,05; Chỉ số tỉ lệ thể tích p = 2; Hệ số Poisson ν xét là hằng số (ν = 0,28). Truyền nhiệt đều: T_c = T_m = 400 K, truyền nhiệt phi tuyến: T_m = 300 K và T_c = 500 K. Tần số dao động riêng không thứ nguyên được tính toán theo công thức $\Omega_1 = \omega (b^2/h) \sqrt{\rho_0/E_0}$, trong đó ρ_0 và E₀ là các giá trị tham chiếu của ρ_m và E_m tại T₀ = 300 K. Kết quả tính toán được so sánh với kết quả đã công bố của Shen & cs. (2015) trong bảng 2.

3.1.2. Ví dụ KC2 - Đáp ứng chuyển vị của tấm FGM

Xét tấm FGM vuông gồm 2 loại vật liệu thành phần là Al và ZrO_2 (Bảng 1) có cạnh a = 0.2 m, chiều dày h = 0.01 m, chịu tải trọng phân bố đều q₀ = 10⁶ (Pa). Đáp ứng độ võng tại điểm chính giữa tấm được tính toán thông qua hai mô hình lý thuyết đã thiết lập của bài báo và so sánh với kết quả được tính toán thông qua lời giải tích và lời giải PTHH dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (TSDT) đã được công bố bởi (Reddy, 2000) như trong Hình 2.

Trong đó, độ võng và thời gian không thứ nguyên được tính theo công thức $\overline{w} = \frac{w E_m h}{q_0 a^2};$ $\overline{t} = t \sqrt{E_m / (a^2 \rho_m)}$ bước thời gian xét là $\Delta t = 10^{-5} s$.

Vật liệu	Cơ tính	Po	P. ₁	P ₁	P ₂	P ₃
ZrO ₂	E _c (Pa)	244.27E+9	0	-1.371E-03	1.214E-06	-3.681E-10
	α _c (1/K)	12.766E-06	0	-1.491E-03	1.006E-05	-6.778E-11
	K _c (W/m K)	1.7	0	1.276E-04	6.648E-08	0
	Vc	0.2882	0	1.133E-04	0	0
	$ ho_{c}$ (kg/m ³)	3000	0	0	0	0
AI	E _m (Pa)	70.0E+9				
	α _m (1/K)	23E-6				
	K _m (W/m K)	204				
	v _m	0.3				
	$\rho_m(kg/m^3)$	2707				
Si ₃ N ₄	E _c (Pa)	348.43E+9	0	-3.07E+04	2.160E+07	-8.946E-11
	α _c (1/K)	5.8723E-06	0	9.095E-04	0	0
	K _c (W/m K)	13.723	0	-1.032E-03	5.466E-07	-7.876E-11
	íc	0.24	0	0	0	0
	ρ _c (kg/m³)	2370	0	0	0	0
SUS304	E _m (Pa)	201.04E+9	0	3.079E-04	-6.53E-07	0
	v _m (1/K)	12.33E-06	0	8.086E-04	0	0
	K _m (W/m K)	15.379	0	-1.264E-03	2.09E-06	-7.223E-10
	ν _m	0.3262	0	-2.002E-04	3.797E-07	0
	ρ_{m} (kg/m ³)	8166	0	0	0	0

Bảng 1. Cơ tính phụ thuộc nhiệt độ của các thành phần Gốm và Kim loại

Nguồn: Touloukian, 1966.

Bảng 2. Tần số $\Omega_{\! 1}\,(m,\!n)$ của mảnh vỏ thoải FGM hai độ cong

NUL '04 #0		(m, n)				
ινηιέτ αό	woninn	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)	
$T_c = 400 \text{ K},$	(Shen cs., 2015)	6.7887	16.6717	16.6605	25.7837	
1 _m = 400 K	Bài báo	6.9080	16.5120	16.5377	25.5404	
	Sai lệch (%)	1.73	0.97	0.74	0.95	
T _c = 500 K, T _m = 300 K	<u>///LUAN AN Huan/KET QUA</u> SO/KetQuaSo LuanAn/Code KIEMCHUNG_LA HUAN/KQ K C Dao dong rieng_Tab4_Shen 2015.xlsx - RANGE!_ENREF_93 (Shen & cs., 2015)	6.8414	16.7251	16.7137	25.8402	
	Bài báo	6.9018	16.4971	16.5228	25.5174	
	Sai lệch (%)	0.88	1.38	1.16	1.27	

Nhận xét: Bảng so sánh cho thấy sai lệch giữa kết quả công bố bởi (Shen, Chen & cs. 2015) theo mô hình giải tích dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và kết quả tính bằng mô hình PTHH của bài báo là không đáng kể (lớn nhất là 1.73%). Từ đó cho thấy độ tin cậy của mô hình và kết quả số mà bài báo đã thiết lập.

3.2. Kết quả khảo sát

3.2.1. Bài toán dao động riêng

a. Ví dụ 1 - Ánh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích p

Xét mảnh vỏ cầu thoải FGM (Si₃N₄/SUS304), có h = 0.01 m, a/h = 20; a/R = 1/5 với ba loại điều kiện biên là bốn cạnh đều là khớp (SSSS); hai cạnh khớp, hai cạnh ngàm (SCSC) và bốn cạnh ngàm (CCCC). Giả thiết truyền nhiệt phi tuyến với $T_m = 300$ K và $T_c = 500$ K. Kết quả được trình bày trong bảng 3.

b. Ví dụ 2 - Ảnh hưởng của tỷ số a/h

Mảnh vỏ cầu thoải FGM (Si₃N₄/ SUS304)

trong ví dụ này có chỉ số tỷ lệ thể tích p = 2, h = 0.01 m, a = 1.0 m; R = 5 m. Ba loại điều kiện biên được xem xét là SSSS, SCSC và CCCC. Nhiệt độ được truyền phi tuyến với $T_m = 300$ K, $T_c = 400$ K.

Tần số dao động riêng không thứ nguyên được tính toán theo công thức $\Omega_2 = 100.\omega.h \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$

((Wattanasakulpong & Chaikittiratana, 2015)), trong đó ρ_0 và E_0 là các giá trị tham chiếu của ρ_c và E_c tại $T_0 = 300$ K. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tần số dao động riêng của vỏ được biểu diễn trên hình 2.



Nhận xét: Kết quả tính bằng đáp ứng chuyển vị theo mô hình PTHH của bài báo cũng rất gần khi so với kết quả tính theo mô hình giải tích của Reddy. Điều này một lần nữa khẳng định thuật toán và mô hình của bài báo thiết lập là có độ tin cậy.

Hình 1	Ðán	ířno	chuvển	vite	hi điểm	chính	ิ่งว่าเรื่อ	tấm	FGM	(a/2)	h/2	١
	. Dap	ung	unuyen	VIUG	u uiem	umm	giua	uam	TOM	(a/2)) U/4	,

Diầu kiên biên	Chỉ số tỉ lệ thể tích p							
Dieu kiện biến —	p = 0	p = 0.5	p = 1	p = 2	p = 5			
SSSS	14.7688	10.2388	9.0591	8.2595	7.6984			
SCSC	20.8964	14.4588	12.7433	11.5401	10.6412			
CCCC	26.2197	18.1488	15.9694	14.4151	13.2258			

Bảng 3. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích p
 đến Ω_1

Nhận xét: Giá trị tần số dao động riêng cơ bản của vỏ với cả ba trường hợp điều kiện biên được khảo sát đều giảm khi tỉ số tỉ lệ thể tích p tăng. Điều này là hoàn toàn phù hợp với qui luật của vật liệu: khi p tăng thì đồng nghĩa với việc hàm lượng gốm (ceramic) trong vật liệu giảm và hàm lượng kim loại (metal) tăng và do đó vỏ trở lên mềm hơn.



Nhận xét: Khi tỷ số a/h tăng, các vỏ trở nên mỏng hơn và do đó độ cứng của vỏ giảm, điều này được phản ánh thông qua tần số dao động riêng Ω_2 của các vỏ đều giảm khi tỉ số a/h tăng. Độ giảm của Ω_2 lớn khi tỷ số a/h tăng từ 10 đến 30, sau đó tốc độ giảm nhỏ dần, khi tỷ số a/h lớn hơn 40 thì tần số Ω_2 thay đổi rất nhỏ.

Hình 3. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến Ω_2 của mảnh vỏ cầu thoải FGM



Nhận xét: Tần số dao động riêng của tất cả các vỏ khảo sát đều giảm khi chênh lệch nhiệt độ (ΔT (K)) giữa hai bề mặt của vỏ tăng lên. Điều này có nghĩa là khi sự chênh lệch nhiệt độ giữa hai bề mặt của vỏ tăng lên sẽ làm vỏ trở nên mềm hơn.

Hình 4. Ảnh hưởng của nhiệt độ (ΔT (K)) đến Ω_1 của mảnh vỏ cầu FGM

c. Ví dụ 3 - Ảnh hưởng của nhiệt độ

Xét mảnh vỏ cầu thoải FGM (Si₃N₄/ SUS304) với các thông số như sau: p = 2, h = 0.01 m, a/h = 20, a/R = 1/5. Ba loại điều kiện biên được xem xét là SSSS, SCSC và CCCC. Nhiệt độ truyền từ mặt gốm sang mặt kim loại theo qui luật phi tuyến với $T_m = 300$ K và $T_c = T_m + \Delta T$. Kết quả khảo sát tần số dao động riêng Ω_1 khi xét ảnh

hưởng của sự thay đổi nhiệt độ giữa hai bề mặt kết cấu được thể hiện trên hình 4.

3.2.2. Bài toán dao động cưỡng bức

Trong phần này, ảnh hưởng của các tham số vật liệu, tham số hình học, nhiệt độ và hệ số cản đến đáp ứng chuyển vị của vỏ FGM được khảo sát. Hai loại tải trọng được xét là: tải trọng xung và tải trọng điều hòa có dạng F(t) = $P_0.P(t)$. Với tải trọng xung: $P(t) = \{1, 0 \le t\}$; tải trọng điều hòa: $P(t) = \sin(\Omega t)$. Trong đó: P_0 là biên độ của lực cưỡng bức; Ω là tần số dao động của lực cưỡng bức. Đáp ứng chuyển vị trong tất cả các trường hợp khảo sát trong bài báo là đáp ứng của điểm chính giữa vỏ $K_{\rm m}$ (a/2, b/2).

a. Ví dụ 1 - Månh vỏ cầu thoải FGM chịu tải trọng xung

Xét mảnh vỏ cầu thoải FGM (Si₃N₄/ SUS304) với các thông số như sau: h = 0.01 m, R/a = 5, tựa bản là bốn cạnh SSSS. Nhiệt truyền phi tuyến T_m = 300 K, T_c = 500 K, tải trọng xung phân bố đều q₀ = 10⁶ (Pa). Ảnh hưởng của chỉ số tỉ lệ thể tích p, tỷ số a/h và tỉ lệ cản đến đáp ứng chuyển vị của các vỏ (Hình 5, 6, 7).



Hình 5. Ảnh hưởng của chỉ số p đến đáp ứng chuyển vị của mảnh vỏ cầu FGM chịu tải trọng xung



Hình 6. Ánh hưởng của tỷ số a/h đến đáp ứng chuyển vi của mảnh vỏ cầu FGM



Hình 7. Ánh hưởng của tỷ lệ cản đến đáp ứng chuyển vị của mảnh vỏ cầu FGM chịu tải trọng xung

Từ đồ thị trên hình 5 nhận thấy tải trọng xung làm cho các vỏ dao động điều hòa, độ lớn và biên độ dao động của vỏ phụ thuộc vào độ lớn của tải trọng và độ cứng của vỏ. Trong các trường hợp khảo sát, nhận thấy khi chỉ số thể tích p tăng lên sẽ làm cho chu kỳ và biên độ dao động của các vỏ tăng. Điều này là hoàn toàn phù hợp với kết quả khảo sát trong phần dao động tự do của các vỏ, khi chỉ số thể tích p tăng thì tần số dao động giảm và do đó chu kỳ dao động tăng, điều đó nghĩa là khi p lớn thì độ cứng của vỏ P-FGM nhỏ.

Kết quả trên hình 6 cho thấy độ dày của vỏ có ảnh hưởng rất lớn đến đáp ứng động của các vỏ. Biên độ, tần số và chu kỳ dao động của vỏ không tỷ lệ tuyến tính với tỷ số a/h của vỏ. Cụ thể, khi tỷ số a/h nhỏ, biên độ dao động của vỏ là rất nhỏ, và biên độ dao động này tăng lên nhanh chóng khi a/h tăng từ 10 lên 20 và 30.

Hình 7 biểu thị ảnh hưởng của tỷ lệ cản (γ_1 , γ_2) đến đáp ứng chuyển vị của mảnh vỏ thoải FGM. Từ đồ thị cho thấy ngay cả với trường hợp tỷ lệ cản nhỏ (0.01) thì dao động của vỏ cũng đã giảm khá nhanh, đối với trường hợp tỷ lệ cản là 0.07 thì dao động nhanh chóng bị tắt. Điều này có thể hiểu rằng trong điều kiện làm việc bình thường, dao động của các vỏ cũng sẽ tắt đi nhanh chóng do chịu ảnh hưởng của cản độ cứng và cản khối lượng.

b. Ví dụ 2 - Mảnh vỏ cầu thoải FGM chịu tải trọng điều hòa

Trong ví dụ này, mảnh vỏ cầu FGM (Si₃N₄/ SUS304) được xét với các thông số như sau: p = 2, h = 0.01 m, a/h = 20, R/a = 5, nhiệt độ truyền theo qui luật phi tuyến từ mặt gốm sang mặt kim loại với T_m = 300 K, T_c = 500 K. Mảnh vỏ chịu tải trọng điều hòa có biên độ q₀ = 10⁶ (Pa) và điều kiện biên bốn cạnh tựa khớp SSSS. Ảnh hưởng của chỉ số tỉ lệ thể tích p, tỷ số a/h và tỉ số tần số dao động cưỡng bức/tần số dao động riêng (Ω/ω) đến đáp ứng chuyển vị của mảnh vỏ (Hình 8, 9, 10).

Hình 8 cho thấy khi chịu tác động của tải trọng điều hòa, mảnh vỏ dao động điều hòa theo tần số của tải trọng trong trường hợp p thay đổi từ 0 đến 2. Tuy nhiên, khi p = 5 và p = 10 thì xảy ra hiện tượng. Nguyên nhân của hiện tượng này là do khi p thay đổi sẽ làm cho độ cứng của vỏ thay đổi, dẫn đến tần số dao động riêng của vỏ thay đổi, trường hợp tần số dao động riêng của vỏ khác xa tần số của tải trọng thì vỏ sẽ dao động theo tần số của tải trọng; khi tần số dao động riêng của vỏ xấp xỉ bằng với tần số của tải trọng sẽ xảy ra hiện tượng phách.



Hình 8. Ảnh hưởng của chỉ số *p* đến đáp ứng động của mảnh vỏ cầu FGM chịu tải trọng điều hòa



Hình 9. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến đáp ứng động của mảnh vỏ cầu FGM chịu tải trọng điều hòa



Hình 10. Ảnh hưởng của tỉ số Ω/ω đến đáp ứng động của mảnh vỏ cầu FGM chịu tải trọng điều hòa

Hình 9 cho thấy khi tỷ số a/h thay đổi thì biên độ dao động của mảnh vỏ thay đổi một cách nhanh chóng, điều này một lần nữa khẳng định tỷ số a/h là tham số ảnh hưởng rất lớn đến khả năng chịu lực của các vỏ FGM. Nói cách khác, độ dày là yếu tố rất quan trọng quyết định độ cứng của vỏ.

Kết quả trên hình 10 cho thấy khi vỏ chịu tải trọng điều hòa có tần số khác xa so với tần số dao động riêng của nó thì vỏ sẽ dao động theo tải trọng ngoài, độ lớn của biên độ dao động phụ thuộc vào độ cứng của vỏ và biên độ của tải trọng. Khi tần số dao động của tải trọng gần với tần số dao động riêng của vỏ thì xảy ra hiện tượng phách và khi tần số của tải trọng bằng với tần số dao động riêng của vỏ thì xảy ra hiện tượng cộng hưởng.

4. KẾT LUẬN

Mô hình phần tử hữu hạn sử dụng phần tử 3D suy biến đã được thiết lập trong bài báo này để phân tích dao động tự do và đáp ứng động của mảnh vỏ cầu thoải FGM trong môi trường nhiệt độ. Với giả thiết nhiệt độ được truyền qua chiều dày vỏ theo các quy luật hằng số, bậc nhất và phi tuyến, bài báo đã khảo sát ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học và tải trọng tác động đến đáp ứng chuyển vị của vỏ với một số điều kiên biên thông dụng. Kết quả kiểm chứng cho thấy sự chính xác của mô hình và chương trình tính. Qua kết quả khảo sát có thể nhân thấy đáp ứng đông của vỏ FGM phu thuộc nhiều vào độ dày của vỏ, điều kiện biên, sự chênh lệch nhiệt độ giữa hai bề mặt và tính chất của tải trọng tác động.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Ahmad S., Irons B.M. Zienkiewicz O. (1970). Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2(3): 419-451.
- Bich D.H., Ninh D.G. & Thinh T.I. (2016). Non-linear buckling analysis of FGM toroidal shell segments filled inside by an elastic medium under external pressure loads including temperature effects. Composites Part B: Engineering. 87: 75-91.

- Bich D.H. & Van Dung D. (2012). Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects. Composite Structures. 94(9): 2952-2960.
- Bich D.H. & Van Tung H. (2011). Non-linear axisymmetric response of functionally graded shallow spherical shells under uniform external pressure including temperature effects. International Journal of Non-Linear Mechanics. 46(9): 1195-1204.
- Duc N.D. & Cong P.H. (2013). Nonlinear postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on elastic foundations using higher order shear deformation plate theory in thermal environments. Composite Structures. 100: 566-574.
- Duc N.D. & Quan T.Q. (2013). Nonlinear postbuckling of imperfect eccentrically stiffened P-FGM double curved thin shallow shells on elastic foundations in thermal environments. Composite Structures. 106: 590-600.
- Duc N.D. & Van Tung H. (2011). Mechanical and thermal postbuckling of higher order shear deformable functionally graded plates on elastic foundations. Composite Structures. 93(11): 2874-2881.
- Haddadpour H., Mahmoudkhani S. & Navazi H. (2007). Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells including thermal effects. Thin-walled structures. 45(6): 591-599.
- Javaheri R. & M. Eslami (2002). Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory. Journal of thermal stresses. 25(7): 603-625.
- Jooybar N., Malekzadeh P., Fiouz A. & Vaghefi M. (2016). Thermal effect on free vibration of functionally graded truncated conical shell panels. Thin-Walled Structures. 103: 45-61.
- Kadoli R. & Ganesan N. (2006). Buckling and free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells subjected to a temperaturespecified boundary condition. Journal of Sound and Vibration. 289(3): 450-480.
- Kandasamy R., Dimitri R. & Tornabene F. (2016). Numerical study on the free vibration and thermal buckling behavior of moderately thick functionally graded structures in thermal environments. Composite Structures. 157: 207-221.
- Malekzadeh P., Fiouz A. & Sobhrouyan M. (2012). Three-dimensional free vibration of functionally graded truncated conical shells subjected to thermal environment. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 89: 210-221.
- Malekzadeh P. & Heydarpour Y. (2012). Free vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells in thermal environment. Composite Structures. 94(9): 2971-2981.

- Ninh D.G. & Bich D.H. (2016). Nonlinear buckling of eccentrically stiffened functionally graded toroidal shell segments under torsional load surrounded by elastic foundation in thermal environment. Mechanics Research Communications. 72: 1-15.
- Pradyumna S. & Bandyopadhyay J. (2010). Free vibration and buckling of functionally graded shell panels in thermal environments. International Journal of Structural Stability and Dynamics. 10(05): 1031-1053.
- Praveen G. & Reddy J.(1998). Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. International Journal of Solids and Structures. 35(33): 4457-4476.
- Reddy J. (2000). Analysis of functionally graded plates. International Journal for numerical methods in engineering. 47(1-3): 663-684.
- Shen H.S., Chen X., Guo L., Wu L. & Huang X.L. (2015). Nonlinear vibration of FGM doubly curved panels resting on elastic foundations in thermal environments. Aerospace Science and Technology. 47: 434-446.
- Sheng G. & Wang X. (2008). Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic

medium. Journal of Reinforced Plastics and Composites. 27(2): 117-134.

- Touloukian Y.S. (1966). Thermophysical properties of high temperature solid materials, Thermophysical and Electronic Properties Information Analysis Center Lafayette In. 2
- Tùng Hoàng Văn Tùng (2011). Ôn định đàn hồi của tấm và vỏ composite có cơ tính biến đổi Luận án Tiến sĩ Cơ học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- Van Tung H. & Duc N.D. (2010). Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads. Composite Structures. 92(5): 1184-1191.
- Van Tung H. & Duc N.D. (2014). Nonlinear response of shear deformable FGM curved panels resting on elastic foundations and subjected to mechanical and thermal loading conditions. Applied Mathematical Modelling. 38(11): 2848-2866.
- Wattanasakulpong N. & Chaikittiratana A. (2015). An analytical investigation on free vibration of FGM doubly curved shallow shells with stiffeners under thermal environment. Aerospace Science and Technology. 40: 181-190.